

## הנושא: זוגות של פונקציות

הוכן ע"י: אלה שמוקלר, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, טכניון.

תקציר: בחומר מובאות פעילויות להשוואת התכונות של פונקציות הפוכות, פונקציות נגדיות ופונקציות הופכיות. כן מובאת פעילות בה יש למצוא תבניות של זוגות פונקציות כאשר נתון איפיון מסויים של זוג הפונקציות.  
ניתן לשלב בפעילות שימוש בתוכנת מחשב המאפשרת שרטוט גרפים או שימוש במחשבון גרפי.

מילות מפתח: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (חדו"א), אנליסה, חקירת פונקציה, גרף, תחום הגדרה, פונקציה זוגית, פונקציה אי-זוגית, חיתוך עם הצירים, עליה, ירידה, נקודת אפס, נקודת קיצון, אסימפוטטה (אנכית, אופקית, משופעת), מחשב, מחשבון גרפי.

החומר הוגש במסגרת: סדנא למורים בפרויקט "מחר 98" באצבע הגליל, ינואר 1995.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

**תוכנית הסדנא:**

- 2 ..... משימה א' : מתכונות של פונקציה נתונה אל תכונות של בת הזוג שלה
- 3 ..... משימה ב' : השוואת תכונות של שתי פונקציות הפוכות
- 4 ..... משימה ג' : השוואת תכונות של שתי פונקציות נגדיות
- 5 ..... משימה ד' : השוואת תכונות של שתי פונקציות הופכיות
- 7 ..... משימה ה' : מתכונות של פונקציה נתונה אל תכונות של בת הזוג שלה - סיכום
- 8 ..... נספח : משימות נוספות לעבודה עצמית בנושא "זוגות של פונקציות"

**משימה א': מתכונות של פונקציה נתונה אל תכונות של בנות הזוג שלה**

- (1) עבור כל פונקציה הנתונה בטבלה שלהלן תארו את כל התכונות העיקריות שלה כגון תחום הגדרה, זוגיות, אי-זוגיות, מחזוריות, עליה, ירידה, רציפות, נקודות קיצון, אסימפטוטות. (2) מיצאו את בנות הזוג של הפונקציות ואפינו את כל אחת מהן בהתאם, כפי שמודגם.

#	פונקצית המוצא $f(x)$	תכונות עיקריות של $f(x)$	הפונקציה ההפוכה $g(x)$ ותכונותיה העיקריות	הפונקציה הנגדית $h(x) = -f(x)$ ותכונותיה העיקריות	הפונקציה ההופכית $r(x) = 1/f(x)$ ותכונותיה העיקריות
1	$f(x) = x^2$	תחום הגדרה: כל $x$ ממשי; נקודת מינימום $x=0$ , רציפה, זוגית, אי שלילית	$g(x) = [\text{אין}]$	$h(x) = -x^2$ תכונות: תחום הגדרה: כל $x$ ממשי, זוגית, אי-חיובית, רציפה, נקודת מקסימום $x = 0$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$ תכונות: תחום הגדרה: $x \neq 0$ ; זוגית, חיובית, לא עולה ולא יורדת.
2	$f(x) = \frac{1}{x^3}$		$g(x) =$ תכונות:	$h(x) =$ תכונות:	$r(x) =$ תכונות:
3	$f(x) = 2^x$		$g(x) =$ תכונות:	$h(x) =$ תכונות:	$r(x) =$ תכונות:
4	$f(x) = \sqrt{x+1}$		$g(x) =$ תכונות:	$h(x) =$ תכונות:	$r(x) =$ תכונות:
5	$f(x) = \sin x$		$g(x) =$ תכונות:	$h(x) =$ תכונות:	$r(x) =$ תכונות:
6	$f(x) = \arcsin x$		$g(x) =$ תכונות:	$h(x) =$ תכונות:	$r(x) =$ תכונות:
7	$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$		$g(x) =$ תכונות:	$h(x) =$ תכונות:	$r(x) =$ תכונות:

-

**משימה ב': השוואת תכונות של שתי פונקציות הפוכות**

ענו על השאלות הבאות:

- (1) מהו המצב ההדדי של הגרפים של שתי פונקציות הפוכות זו לזו?  
\_\_\_\_\_
- (2) האם ייתכן מקרה שבו הפונקציה ההפוכה זהה לפונקציה המקור? \_\_\_\_\_  
אם כן, מתי חל המקרה?  
\_\_\_\_\_
- (3) האם ייתכן כי תחומי הגדרה וקבוצות התמונות של שתי פונקציות הפוכות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  מתלכדים בהתאם, והפונקציות אינן זהות? \_\_\_\_\_  
אם כן, תנו דוגמה לתופעה: \_\_\_\_\_
- (4) האם ייתכן כי לפונקציה  $f(x)$  אין נקודות התאפסות, ולפונקציה ההפוכה  $g(x)$  יש נקודות התאפסות? \_\_\_\_\_  
אם כן, תנו דוגמה לתופעה: \_\_\_\_\_
- (5) האם ייתכן כי גרפים של שתי פונקציות הפוכות אינם נחתכים? \_\_\_\_\_  
אם כן, תנו דוגמה: \_\_\_\_\_
- (6) אם הגרפים של שתי פונקציות הפוכות כן נחתכים, איפה נמצאת נקודת החיתוך? \_\_\_\_\_
- (7) האם ייתכן שהגרפים של שתי פונקציות הפוכות נחתכים במספר נקודות גדול מ-1? \_\_\_\_\_ . אם כן, תנו דוגמא: \_\_\_\_\_
- (8) אם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון אחת לפחות, מה ניתן להגיד לגבי הפונקציה ההפוכה שלה? \_\_\_\_\_
- (9) האם ייתכן כי הפונקציה  $f(x)$  אינה מונוטונית בתחום הגדרתה, ובכל זאת הפונקציה ההפוכה קיימת בכל התחום? \_\_\_\_\_ . אם כן, תנו דוגמא: \_\_\_\_\_

**משימה ג': השוואת תכונות של שתי פונקציות נגדיות**

ענו על השאלות הבאות:

(1) מהו המצב ההדדי של הגרפים של שתי פונקציות נגדיות?

---

---

(2) איזה קשר קיים בין תחומי הגדרה של פונקציות נגדיות?

---

ובין קבוצות התמונות שלהן?

---

---

(3) האם ייתכן כי הגרף של  $f(x)$  נמצא מעל לגרף של  $h(x) = -f(x)$  בכל התחום? \_\_\_\_\_

אם כן, תנו דוגמא:

$$f(x) = \boxed{\phantom{000000}}, \quad h(x) = -f(x) = \boxed{\phantom{000000}}$$

(4) איזה קשר קיים בין נקודות של פונקציות נגדיות  $f(x)$  ו-  $h(x) = -f(x)$ :  
- נקודות אפס? \_\_\_\_\_

- נקודות קיצון? \_\_\_\_\_

- נקודות חיתוך עם הצירים? \_\_\_\_\_

(5) איזה קשר קיים בין האסימפטוטות של פונקציות נגדיות  $f(x)$  ו-  $h(x) = -f(x)$ :

- אסימפטוטות אנכיות? \_\_\_\_\_

- אסימפטוטות אופקיות? \_\_\_\_\_

- אסימפטוטות משופעות? \_\_\_\_\_

**משימה ד': השוואת תכונות של שתי פונקציות הופכיות**

ענו על השאלות הבאות:

(1) האם תחום הגדרה של  $r(x) = \frac{1}{f(x)}$  תמיד זהה לתחום הגדרה של  $f(x)$ ? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ מתני תחומי ההגדרה של  $f(x)$  ו  $r(x)$  זהים?

\_\_\_\_\_ מתני התחומים הנ"ל אינם זהים?

(2) האם ייתכן שעבור  $x = x_0$  הפונקציה  $f(x)$  אינה מוגדרת והפונקציה  $r(x) = \frac{1}{f(x)}$  כן מוגדרת?

יהי A תחום הגדרה של  $f(x)$  ו- B תחום הגדרה של  $r(x) = \frac{1}{f(x)}$ .

מהו הקשר בין קבוצות A ו- B? נא להקיף בעיגול את מס' התשובה שתבחר.

א.  $A = B$

ב.  $B \subset A$

ג.  $A \subset B$

ד.  $A \subseteq B$

ה.  $A \subseteq B$

(3) אם  $r(x) = \frac{1}{f(x)}$ , האם נכון כי  $f(x) = \frac{1}{r(x)}$  עבור כל x \_\_\_\_\_

בתחום ההגדרה של  $r(x)$ ? \_\_\_\_\_ ; בתחום ההגדרה של  $f(x)$ ? \_\_\_\_\_

מתני  $f(x) = \frac{1}{r(x)} \Leftrightarrow r(x) = \frac{1}{f(x)}$  ?

---

---

(4) במקרה שבו הפונקציה  $f(x)$  עולה בכל התחום האם הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

בהכרח יורדת בכל התחום? \_\_\_\_\_.

במקרה והתשובה היא "כן", תנו הוכחה, "לא" - הביאו דוגמא.

---

---

(5) אילו תכונות של  $f(x)$  נשמרות במלואן עבור  $r(x) = \frac{1}{f(x)}$

---

---

(6) האם הגרפים של שתי פונקציות הופכיות בהכרח נחתכים? \_\_\_\_\_

איפה נמצאות נקודות חיתוך שלהן? \_\_\_\_\_

האם ייתכן שהגרפים נחתכים בנקודה אחת בלבד? \_\_\_\_\_

בשתי נקודות? \_\_\_\_\_

ב - n נקודות (n מספר טבעי כלשהוא)? \_\_\_\_\_

**משימה ה': מתכונות של פונקציה נתונה אל תכונות של הזוג שלה - סיכום**

בכל שורה של הטבלה שלהלן צויינה תכונה מסוימת של פונקציה המוצא  $f(x)$ . עבור כל בת זוג של  $f(x)$  נא לציין אותן התכונות אשר נגררות בהכרח ע"י התכונה הנתונה של  $f(x)$ .

תכונות של הפונקציה ההופכית $r(x) = 1 / f(x)$	תכונות של הפונקציה הנגדית $h(x) = -f(x)$	תכונות של הפונקציה ההפוכה $g(x)$	תכונה של $f(x)$
			מתאפסת עבור $x = x_0$
			חיובית בתחום מסוים
			שלילית בתחום מסוים
			עולה בתחום מסוים
			יורדת בתחום מסויים
			רציפה בנקודה $x_0$
			בעלת נקודת מקסימום $(x_0, y_0)$
			בעלת נקודת מינימום $(x_0, y_0)$
			בעלת אסימפטוטה אנכית $x = x_0$
			בעלת אסימפטוטה אופקית $y = b$
			בעלת אסימפטוטה משופעת $y = ax + b$
			מחזורית בעלת מחזור T



**נספח: משימות נוספות לעבודה עצמית בנושא "זוגות של פונקציות"**

בכל סעיף של הטבלה שלהלן נתון איפיון מסויים של זוג פונקציות. יש להציע תבניות של בנות הזוג שעבורו מתממש האיפיון וליצור תמונה גרפית של הזוג על צג המחשב.

דוגמה	איפיון של זוג פונקציות
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(1) גרף של פונקציה $f(x)$ וגרף של פונקציה $g(x)$ ההפוכה ל- $f(x)$ נחתכים באינסוף נקודות.
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $r(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(2) גרפים של שתי פונקציות הופכיות $f(x)$ ו- $r(x)=1/f(x)$ נחתכים באינסוף נקודות.
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $r(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(3) הגרף של פונקציה $f(x)$ שלא נמצא כולו מעל או כולו מתחת לישר $y = 1$ אינו נחתך עם גרף הפונקציה ההופכית $r(x)=1/f(x)$ .
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(4) גרף של פונקציה $f(x)$ שלא נמצא כולו מעל או כולו מתחת לציר ה- $x$ אינו נחתך עם גרף הפונקציה הנגדית $h(x) = -f(x)$ .
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(5) גרפים של שתי פונקציות פולינומאליות נגדיות ממעלה חמש $f(x)$ ו- $h(x) = -f(x)$ נטולות שורשים מרוכבים, נחתכים רק בשתי נקודות.
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(6) גרף של פונקציה מעריכית $a^x f(x)$ משיק לגרף של הפונקציה ההפוכה $g(x)$ .
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(7) פונקציה $f(x)$ מוגדרת בכל ציר ה- $x$ , ותחום הפונקציה ההפוכה לה $g(x)$ הוא $0 < x < 1$ .
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(8) עבור פונקציה $f(x)$ שהיא מוגדרת ורציפה בכל ציר ה- $x$ קיימת פונקציה הפוכה $g(x)$ בתחום $ x  \geq 1$ ולא קיימת פונקציה הפוכה באף קטע $0 < x < b$ כאשר $0 < b < 1$ ובאף קטע $a < x < 0$ כאשר $-1 < a < 0$ .
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(9) גרפים של שתי פונקציות נגדיות $f(x)$ ו- $h(x) = -f(x)$ נחתכים באינסוף נקודות.
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $r(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(10) גרפים של שתי פונקציות הופכיות $f(x)$ ו- $r(x) = 1 / f(x)$ משיקים זה לזה באינסוף נקודות.
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $r(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(11) לפונקציה ההפכית $r(x) = 1 / f(x)$ יש שתי אסימפטוטות אנכיות: $x = 1$ ; $x = -1$ , אסימפטוטה אופקית $y = 0.5$ ו- $r(0) = -0.5$ .
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(12) פונקציה $g(x)$ ההפוכה ל- $f(x)$ מקיימת את התנאים: $g(0) = 1$ ; $g(1) = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 2$ , $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -2$

דוגמה	איפיון של זוג פונקציות
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(13) פונקציה נגדית $h(x) = -f(x)$ מקיימת את התנאים: $r(0) = -1$ ; $r(-1) = r(1) = r(2) = 0$ ; $x$ עבור כל $h(x) \leq 0$ לגרף של $r(x)$ יש אסימפטוטה משופעת $y = x$ עבור $x \rightarrow \infty$ ו- אסימפטוטה משופעת $y = -x$ עבור $x \rightarrow -\infty$ .
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $r(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(14) פונקציה הופכית $\frac{1}{f(x)} r(x) =$ מקיימת את התנאים: $\lim_{x \rightarrow 2} r(x) = 0$ ; לגרף של $r(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $x = 3$ $r(x) \geq 0$ ; בכל תחום ההגדרה של $r(x)$ . $r(0) = 1$ .
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(15) פונקציה $g(x)$ ההפוכה לפונקציה $f(x)$ מקיימת את התנאים: $g(x)$ אי-זוגית; $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 0+0} g(x) = -\infty$ .
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $r(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(16) גרפים של שתי פונקציות הופכיות $f(x)$ ו- $r(x) = 1/f(x)$ נחתכים עבור $x = 0, x = 1$ . לפונקציה $r(x)$ יש אסימפטוטות $y = x$ ; $x = 2$ .
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $r(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(17) לפונקציה הופכית $r(x) = 1/f(x)$ יש אסימפטוטות אופקיות $y = 2$ עבור $x \rightarrow \infty$ ו- $y = 0$ עבור $x \rightarrow -\infty$ . תחום ההגדרה של $r(x)$ הוא: $ x  \geq 1$ ; $r(1) = 2$ , $r(-1) = 1/2$ .
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(18) עבור פונקציה נגדית $h(x) = -f(x)$ יש אסימפטוטות משופעות: $y = x$ עבור $x \rightarrow \infty$ , $y = -x$ עבור $h(0) = 0$ ; $x \rightarrow -\infty$ ; גרפים של פונקציות $h(x)$ ו- $f(x)$ נחתכים ב-3 נקודות.
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $r(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(19) גרפים של שתי פונקציות הופכיות משיקים זה לזה בשתי נקודות ונחתכים ללא השקה בנקודה אחת.
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	(20) גרפים של שתי פונקציות הפוכות $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים בשתי נקודות, $f(0) = -1$ ; $g(0) = 3$ . תחומי ההגדרה של $f(x)$ ו- $g(x)$ זהים.