הנושא: איפה פוגשים השברים את השקולים להם? האם יכול מפגש זה להתרחש בבית-הספר היסודי?
חלק א'

הוכן ע"י: אילנה ארנון, פרלה נשר ורנטה נירנברג.

תקציר: במאמר מתארות המחברות מחקר שערכו ביחס להבנת מושג השבר כמחלקת שקילות. המחקר נעשה תוך למידה בעזרת התוכנה "שמש" המאפשרת בניית ייצוגים לשברים, המדגישים את תכונתם כמחלקות שקילות.

מילות מפתח: מחקר, ייצוג מוחשי, ייצוג מופשט, קבוצות מספרים, מספרים רציונליים, שבר פשוט, שמות שונים לשבר, מחלקת שקילות, חיבור שברים, חיסור שברים, השוואת שברים, צפיפות השברים, לומדת מחשב, חקר.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 31, תשס"ד 2004, עמודים 40-50.

תרגום מאנגלית של המאמר:

Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? Can this encounter take place in elementary school? International Journal of Computers for Mathematical Learning, V. 6(2), pp. 167-214

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 11 עמודים.

מחקר

איפה פוגשים השברים את השקולים להם?
האם יכול מפגש זה להתרחש בבית הספר היסודי?
חלק א׳

אילנה ארנון, פרלה נשר, רנטה נירנבורג*
מטח – המרכז לטכנולוגיה חינוכית, רמת-אביב

תקציר

המושג מחלקת שקילות ממלא תפקיד חשוב במבנה המספרים הרציונאליים. פיאז׳ה הראה כי כדי לעזור לילדים בבית הספר היסודי לפתח מושגים מתמטיים, יש צורך בעצמים מוחשיים ובפעילויות מוחשיות מעוררות מחשבה. התוכנה ׳שמש׳ פותחה במיוחד ללימוד מושג השבר כמחלקת שקילות. התוכנה מציעה ייצוגים מוחשיים של מחלקות כאלה, כמו גם פעילויות שאינן ניתנות לביצוע ללא מחשב. התוכנה מציגה מערכת קרטזית בדידה, בה מסמנים התלמידים נקודות על השריג ולומדים לזהות כל נקודה כזאת כשברון: זוג מונה-מכנה (Fraction-numeral) אחר כך לומדים התלמידים לבנות קבוצות של נקודות כאלה, שכולן נמצאות על ישר אחד העובר דרך ראשית הצירים. הם לומדים לזהות את הישר עם קבוצת השברים השקולים היוצרים אותו. בהמשך חוקרים התלמידים תופעות ובניות אחרות במערכות כאלה, ומפתחים את הבניות הללו למושגי שברים נוספים. ניתן להשתמש בבניות מוחשיות אלה גם לפתרון בעיות שברים מסורתיות ולהרחבת הטווח של משמעות השברים. תלמידי כיתה ה שהשתמשו ב׳שמש׳ בפעילויות הלימודיות שלהם רואיינו חודשים אחדים לאחר שהסתיימו מפגשי ההוראה.

ראיונות אלה סיפקו עדויות לכך שהילדים אכן החלו לפתח דימוי עבור כל אחד מהמושגים המתמטיים המבוקשים.

הצורך

השוואת שני שברים פירושה מציאת יחס הסדר ביניהם, כמו בבעיה הבאה:

נתונים השברים $\frac{3}{4}$ *ו-* $\frac{7}{10}$*. איזה שבר הוא הגדול יותר, או אולי שניהם שווים?*

כיצד ניגשים בדרך כלל לבעיות כאלה בבית הספר היסודי? אחת הדרכים היא להנחות למידה בעל-פה של אלגוריתם כלשהו.

לדוגמה:

לכל שבר, כיפלו את המונה שלו במכנה של השבר האחר. כיתבו את התוצאה מתחת לשבר:

$$\frac{7}{10} \qquad\qquad \frac{3}{4}$$

$$7\times 4=28 \qquad\qquad 3\times 10=30$$

המספר הגדול יותר מצביע על השבר הגדול יותר. לכן $\frac{3}{4}$ *גדול מ-* $\frac{7}{10}$.

אם מטרתנו היא למידה משמעותית יותר, נוכל לשקול שימוש בשיטות מורכבות יותר. למשל, נוכל ללמד את השיטה הבאה:

מיצאו שני שברים חדשים: האחד שווה ל- $\frac{3}{4}$, השני שווה ל- $\frac{7}{10}$, אבל שניהם בעלי אותו מכנה (מכנה משותף). השוו את השברים החדשים.

כדי להשתמש בשיטה זו, עלינו ללמוד כיצד מוצאים מכנה משותף. שיטה קלה היא להרחיב כל שבר נתון

---

* על-פי תרגום מאנגלית של חלקו הראשון של המאמר:
Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? Can this encounter take place in elementary school? International Journal of Computers for Mathematical Learning, V. 6(2), pp. 167-214.

תרגום: תלמה מוקדי
באישורה של ההוצאה:
Kluwer Academic, Publishers

במכנה של השבר האחר. בדוגמה לעיל נמצא כי $\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$, $\frac{28}{40}=\frac{7}{10}$. על-פי הכלל להשוואת שברים בעלי מכנה משותף נקבל כי $\frac{30}{40}>\frac{28}{40}$, ומכאן כי $\frac{3}{4}>\frac{7}{10}$.

מתמטיקאי יגלה בקלות את הקשר בין שתי השיטות שלעיל, אבל עובדה היא כי לעתים קרובות, תלמידים אינם רואים את הקשר ביניהן.

השיטה השנייה מסתבכת עוד יותר אם מבקשים מהתלמידים להשתמש במכנה המשותף הקטן ביותר. בדוגמה לעיל: 20. למרות ש- 20 הוא מספר שלם קטן יותר, ולכן אולי קל יותר להשתמש בו בחישובים, בהחלט לא קל יותר *לאתר* אותו. כדי למצוא אותו יש להשתמש ברעיונות מורכבים מתחום תורת המספרים השלמים, כגון פירוק מספר לגורמים ראשוניים, ומכפלה משותפת קטנה ביותר [1]. שיטה אחרת היא בניית רשימות של שברים השווים לשברים המקוריים, עד שמגיעים לשברים בעלי מכנה משותף:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\ldots,\qquad \frac{7}{10}=\frac{14}{20}\ldots$$

כאשר לימדנו מושגי שברים לתלמידים בכיתות ד, ה, ו, מצאנו כי מה שנראה פשוט למתמטיקאי אינו פשוט כלל עבור הילד הלומד. תלמידים התקשו מאוד לתפוס בעת ובעונה אחת את המרכיבים השונים של הבעיה ודרך פתרונה. קשה היה להם לתפוס: את שני השברים הנתונים, את השוויון של כל אחד מהם לכל אחד מהשברים שברשימה שלו, ואת שלוש התכונות החשובות של שברים בעלי מכנה משותף:

א. המכנים שלהם זהים;
ב. הם עצמם אינם שווים זה לזה;
ג. כל אחד מהם שווה לאחד השברים המקוריים הנתונים בבעיה, וגם לכל השברים האחרים ברשימה שלו.

הדבר נכון גם לגבי פעולות חשבון אחרות על שברים, כגון חיבור וחיסור. אם איננו רוצים ללמד פעולה כאלגוריתם טכני, הפתרון מתחיל בחיפוש שבר שיחליף את השבר הנתון. את השבר המחליף אנו מחפשים בקבוצת השברים השווים לשבר הנתון. אנו בוחרים את המחליף על פי הנוחות. אותה בעיה חשבונית ניתנת תכופות לפתרון באמצעות יותר מבחירה אחת. המורכבות של כל אחת משיטות הבחירה הללו גורמת לתלמידים להאמין, כי המכנה המשותף שהם מצאו הוא המכנה המשותף היחיד המתאים. יתר על כן, הרעיון שהתוצאה של התרגיל איננה תלויה בשבר המסוים שנבחר לתהליך הפתרון, הוא בעל חשיבות מכרעת בהבנת פעולות על שברים. לדעתנו, אין מקדישים לרעיון זה את תשומת הלב הראויה בלימוד המתמטיקה בבית הספר.

המתמטיקה

שבר אינו זוג יחיד של מספרים שלמים (מונה ומכנה), אלא מחלקת שקילות של זוגות. הפעולות החשבוניות המבוצעות בין שברים מוגדרות למעשה במונחים של מחלקות השקילות שלהם, וקבוצת המספרים הרציונאליים היא למעשה שדה מתמטי המורכב מקבוצות אלה (שהן איבריו) ומפעולות חשבוניות המוגדרות עליהן.

בהמשך המאמר נבחין בין הייצוג של שבר על-ידי זוג מסוים של מונה ומכנה לבין ייצוגו על ידי מחלקת השקילות של שבר זה. את הייצוג הראשון נכנה בשם *שברן* [2] ואל השני נתייחס בשם *מחלקה*.

לדוגמה, השברן $\frac{12}{18}$, ומחלקת השקילות שלו:

$$\left\{\frac{-200}{-300},\ldots,\frac{-12}{-18},\ldots,\frac{-4}{-6},\frac{-2}{-3},\frac{2}{3},\frac{4}{6},\ldots,\frac{12}{18},\ldots,\frac{200}{300},\ldots\right\}$$ [3]

חשוב לציין כי במונח שברן לא השתמשנו בניסוי ההוראה שעליו ידווח בהמשך.

כמה מונחים מרובי משמעויות

בהמשך המאמר נציע היסט פדגוגי של הדגש בהוראת השברים בבית הספר היסודי. המאמר יוקדש להצגת אפשרות הביצוע של הצעה זו: נציג ממצאים המוכיחים כי היסט כזה הוא אפשרי. בדיונים אלה נשתמש בכמה מונחים שהשימוש בהם בתחום החינוך המתמטי הוא רב, אך לעתים קרובות נושא משמעויות שונות. כדי למנוע אי-הבנה, נסביר כאן את הכוונה שלנו בשימוש במונחים אלה.

נתייחס לששת המונחים: מוחשי; מופשט; פעולה; תהליך; עצם; הפנמה.

---

[1] על הקשיים שבפיתוח מושגים הקשורים למבנה הכפלי של המספרים הטבעיים, ראו, למשל, Zazkis et al, 1996.

[2] Numeral באנגלית

[3] עבור תלמידי בתי הספר היסודי אנו עוסקים בשברים אי-שליליים בלבד, ובמונים ומכנים אי-שליליים.

מוחשי ומופשט

אנו משתמשות בשם התואר *מוחשי* כשאנו מתייחסות לשימוש של אדם במושג, כאשר שימוש זה מלווה בייצוג פיסיקלי, ממשי או דמיוני כלשהו. לדוגמה, ילדים רבים, כשהם עוסקים בשברים, מרגישים בנוח כאשר הם נעזרים בגזרות עיגולים, ויהיו אלה גזרות ממשיות עשויות קרטון, או ציורים של גזרות, או רק דימויים מנטליים שלהן.

בספרות[4] מוכרים גם ייצוגים מוחשיים אחרים של שברים. גם מתמטיקאים משתמשים בייצוגים מוחשיים של מושגים מופשטים. לדוגמה, לעתים קרובות הם משתמשים בגרפים במערכות צירים, כשהם עוסקים בפונקציות ממשיות.

אנו משתמשות בשם התואר *מופשט* כדי לתאר שימוש של אדם במושג מתמטי ללא כל ייצוג מן העולם הפיסיקלי. לעתים קרובות מבצעים פעולות על פונקציות ממשיות בלי כל התייחסות לגרפים שלהן, ומשתמשים למטרה זו בשפה ובתחביר מתמטיים, כמו גם בידע שלנו על המבנים המתמטיים המעורבים בפעולה ועל הכללים לצירוף איבריהם. ילדים בגיל האופרציות המוחשיות (גילאי 7 עד 12 בערך) אינם אמורים להיות מסוגלים, על פי פיאז׳ה, לתפעל רעיונות מתמטיים בלי להיעזר בייצוגים מוחשיים[5], אך חלק מהם עושים זאת בכל זאת. לאור התיאוריה של פיאז׳ה, אנו מלמדים את הילדים לבצע פעילויות מוחשיות, ומצפים מהם שיפתחו את המושגים המופשטים המתאימים כתוצאה מפעילויות מעוררות מחשבה מצד אחד, ומהתבגרות קוגניטיבית מצד שני.

פעולה, תהליך ועצם

אנו משתמשות במונחים אלה במשמעות שניתנה להם בתיאוריה הקרויה APOS[6]. על פי תיאוריה זו, התפתחותו של מושג מתמטי מתחילה בתודעתו של הלומד כפעולה. אומרים, על פי תיאוריה זו, שאדם פיתח במוחו מושג בשלב של פעולה, ולא התקדם מעבר לכך, אם הוא מסוגל להתמודד עם בעיה שבה מעורב המושג על-ידי ביצוע פעולה מתאימה צעד אחר צעד, אך אינו מסוגל לדמות לעצמו את הצעד הבא לפני שהשלים את הצעד הקודם.

השלב הבא בהתפתחותו של מושג נקרא *תהליך*. במעבר לשלב הזה הלומד נעשה מודע בהדרגה לפעולה שהוא מבצע, והוא יכול לתאר מילולית חלקים גדלים והולכים שלה. אם הפעולה היא מוחשית, הלומד מצליח לבצע יותר ויותר שלבים שלה בדמיונו, לפני (או במקום) שהוא מבצע אותם הלכה למעשה. הוא מסוגל לנבא את התוצאה ולהמציא קיצורי דרך והוא מסוגל להסיק מסקנות לגבי חלקים אחרים שלה שטרם ביצע.

על פי אותה תיאוריה אומרים שמושג הגיע לשלב *העצם* בהתפתחותו בתודעת הלומד, כאשר הלומד מסוגל לבצע פעולות חדשות על מושג זה או על מושגים דומים לו. פעולות כאלה עשויות, בתורן, להתפתח למושגים חדשים.

הפנמה

במאמר זה, השימוש במונח *הפנמה*, נעשה במשמעות שנתן לו פיאז׳ה. פיאז׳ה מתאר כיצד, באמצעות חשיבה על פעילויות מוחשיות שביצעו, מושג מתפתח בתודעתם של ילד או ילדה מהפעולה המוחשית אל העצם המופשט (אופרציה בלשונו של פיאז׳ה). פיאז׳ה משתמש במונח הפנמה לציון מעבר זה. ב- APOS, בעקבות פיאז׳ה, משתמשים במונח זה בצורה קצת יותר ממוקדת: תיאוריה זו מציעה שלב ביניים בהתפתחות של מושג מפעולה לעצם, והוא שלב התהליך (פעולה – תהליך – עצם). תיאוריה זו משתמשת במונח הפנמה רק לציון המעבר מפעולה לתהליך. לפי ארנון (Arnon, 1998) יכולתם של הלומדים לבצע פעולה מוחשית בדמיונם מצביעה על כך שהפנמה מסוג זה כבר התרחשה.

הצעה להיסט פדגוגי

אנו מציעות ללמד את המושג ׳מחלקות שקילות׳ כהיבט מרכזי של המושג ׳שברים׳. אף כי מושג זה אינו כולל את כל הרעיונות שמהם מורכב מושג השבר, אנו מאמינות שהוא ממלא תפקיד מרכזי בהבנת השברים. יתירה מזו, אנו חשות שאם לא נלמד אותו במפורש ובמכוון, התלמידים לא יצליחו לפתח אותו באופן עצמאי, ולכן הבנת השברים שלהם תיוותר חסרה.

---

[4] תיאור מפורט של הספרות על ייצוגים קונקרטיים שונים של שברים, אפשר למצוא למשל אצל Arnon, 1998

[5] Piaget, 1975, 1976

[6] APOS הם ראשי התיבות של Action-Process-Object-Schema, דהיינו, פעולה-תהליך-אובייקט-סכמה. לפי השקפה זו, זהו האופן שבו לומדים מפתחים מושגים מתמטיים. תיאורים מפורטים של השקפה זו אפשר למצוא אצל (Dubinsky, 1989, 1991) ואצל (Asiala at al, 1996) - בהקשר של חינוך מתמטי בלימודי התואר-הראשון, ואצל (Arnon, 1998) - בהקשר של מושגי השבר בבית הספר היסודי.

כמה שיקולים תיאורטיים

בפיסקה זו נתאר את ההשקפות התיאורטיות העיקריות שהשפיעו ישירות על עבודתנו, בתחילה בתכנון הייצוג המוחשי, התוכנה וניסוי ההוראה, ואחר כך בניתוח הנתונים שאספנו.

הוראת שברים כמחלקות שקילות היא יותר מאשר לימוד השקילות של שני איברים במחלקה נתונה. פירושה ללמד את התלמידים לבצע פעולות מתמטיות על מחלקות כעצמים (Dubinsky, 1991). פירושה גם לעזור לתלמידים לפתח הבנה מתקדמת יותר של מבנה המספרים הרציונאליים והתפקיד שממלאים במבנה זה שברן כלשהו ומחלקת שקילות כלשהי. פיאז'ה הראה כי הארגון של קבוצת מושגים למבנה אחד הוא שלב מתקדם בפיתוח התפיסה של מושגים אלה (Piaget, 1970, 1975, 1976). פישביין ואחרים הדגישו את הצורך ואת חוסר הידע בהתייחסות למספרים הממשיים כאל מערכת (Fishbein et al., 1995). לכן, למרות העובדה שהמושג של שברים כמחלקות שקילות נותר מורכב ומופשט מאוד, נראה לנו חיוני מאוד לעזור לתלמידים לפתח אותו.

פיאז'ה לימד אותנו כי תלמידי בית הספר היסודי (גיל האופרציות המוחשיות) מפתחים מושגים מתמטיים מופשטים באמצעות חשיבה על הפעילויות המוחשיות שהם מבצעים (Piaget, 1975, 1976). מה יקרה אם נלמד את התלמידים לבנות ייצוגים מוחשיים עבור מחלקות שקילות של שברים, ולאחר מכן גם לבצע עליהם פעולות מתמטיות? האם הדבר יקל את לימוד המושג בגיל זה?

ממחקרים שנערכו בעשורים האחרונים על השימוש בעזרי הוראה מוחשיים ללימוד מושגים מתמטיים עולה שעצם הכנסת עזרי ההוראה אינה מובילה כשלעצמה לפיתוח מושגים מופשטים. בשנות ה-70 כתב פרוידנטל:

> "אני מודה שזהו מצב מרגיז כאשר למורים ולכותבי ספרי הלימוד אין מושג ברור כיצד להתקדם מהתפיסה האינטואיטיבית של שברים לשברים אלגוריתמיים, ומשם לכללים עבור שברים".

(Freudenthal, 1973, p. 130)

מאז, מחקרי שדה מלווים בשיקולים תיאורטיים קבעו כמה תנאים הכרחיים להתרחשותה של התפתחות כזאת.

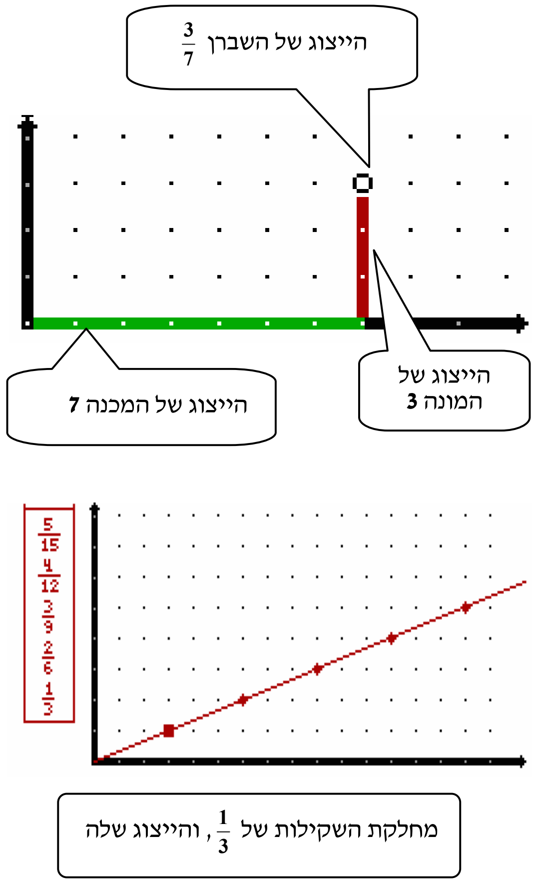
- הכרחי לשמור על התאמה מדוקדקת ומפורשת בין הייצוג המוחשי לבין הרעיון המתמטי שהוא מייצג (Resnick, 1987).
- יש לבחור ולהשתמש בייצוג מוחשי להוראת תחום ידע מתמטי מוגדר היטב. הדבר מצריך שימוש בתחום הדגמה קונקרטי שהוא (כמעט) איזומורפי לתחום הידע המתמטי המוצע. תחום הדגמה כזה צריך להיות מורכב מאובייקטים מוחשיים שהלומד מכיר אותם מראש. יש להשתמש בו כבעולמון שבו בונה הלומד רעיונות מתמטיים חדשים בדרך החקר (Nesher, 1988, 1989)[7].
- פעילויות החקר ממלאות תפקיד חשוב כאסטרטגיית למידה. על פי פיאז'ה (בתיאוריה ההתפתחותית שלו) וגם על-פי APOS (שהיא תיאוריית למידה), התפתחותם של מושגים מתמטיים תלויה בפעילויות מגרות מחשבה.
- לאחר הפנמה נאותה התלמידים צריכים להיות מסוגלים, להפעיל את הפעולות המוחשיות בדמיונם. בכך אנו מתכוונות ליכולת לשחזר את הייצוגים המוחשיים – בין אם בדמיון בלבד או כגרסאות לא מדויקות הנעשות ביד, כגון ציורים ביד חופשית (Arnon, 1998).

האם עקרונות אלה הם יעילים? ניסויים בהוראה הראו שהשימוש בפעילויות מוחשיות בהתאם לעקרונות שתוארו לעיל שיפרו את ההתפתחות של מושג השבר אצל תלמידי בית הספר היסודי (Arnon, 1998).

הייצוג המוחשי

בחרנו לייצג מחלקות שקילות של שברים באמצעות מערכת צירים קרטזית בדידה. שברן מיוצג כאן על-ידי נקודה שהשיעור האנכי שלה הוא המונה והשיעור האופקי שלה היא המכנה. השברנים של כל מחלקת שקילות נמצאים על קו ישר העובר דרך ראשית הצירים (Kieren, 1976; Kalman, 1985 ; Kaput, 1985; Lemerise et al., 1991 Arnon et al., 1999). ראשית הצירים וכל הנקודות על הציר האנכי לא מייצגות אף שבר, כיוון שהשיעור האופקי שלהן הוא 0 (איור 1).

[7] כאן אנו מתייחסים לתיאוריה של נשר על *מערכות למידה*. מערכת למידה מורכבת מתחום ידע, תחום הדגמה, ההתאמה ביניהם והפעילויות שמסייעות לפיתוח תחום הידע בתודעתו של הלומד.

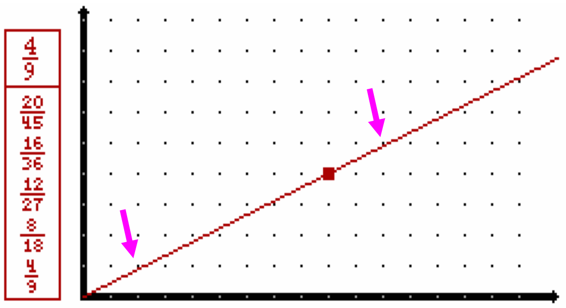


איור 1: שימוש בנקודות ובישרים במערכת קואורדינטות קרטזית בדידה, לייצוג שברים ומחלקות שקילות.

התוכנה

השימוש במחשבים חיוני לייצוג זה, משום שלעתים קרובות לא ניתן להבחין בעין אם נקודה מסוימת שייכת או אינה שייכת לישר מסוים (ולכן, אם השבר שהיא מייצגת שייך או אינו שייך למחלקת השקילות המתאימה). לדוגמה, באיור 2, קשה להחליט באמצעות התבוננות בלבד אם הנקודות המסומנות שייכות או אינן שייכות לקו הישר (האם השברנים $\frac{5}{11}$ ו-$\frac{1}{2}$ שייכים או אינם שייכים למחלקת השקילות של $\frac{4}{9}$).

אנו זקוקים לתוכנת מחשב כדי לאמת זאת.



איור 2: האם הנקודות המסומנות בחץ נמצאות על הישר? רק המחשב יכול להראות זאת בוודאות.

פותחה תוכנה בשם 'שמשי'[8], המבוססת על ייצוג מחלקות השקילות כישרים העוברים דרך ראשית הצירים. המסך הראשי בנוי משני חלקים: תחום מספרים ותחום ציורים (Nesher, 1989; Yerushalmy, 1991). מחלקת שקילות מיוצגת בתחום המספרים כרשימה של שברנים, הנקראת 'מחלקה של שברים שקולים'. בתחום הציורים היא מיוצגת על ידי ישר העובר דרך ראשית הצירים יחד עם כל הנקודות על ישר זה שיש להן שיעורים שלמים: נקודה לכל שברן (איור 1). שני חלקי המסך נפרדים זה מזה הן מבחינה חזותית והן מבחינה תפעולית: המשתמש צריך לבחור באחד התחומים כדי לעבוד בו. אבל מבחינה מתמטית שני התחומים קשורים ביניהם בקשר הדוק: כל פעולה מתמטית בתחום עבודה אחד יוצרת באופן אוטומאטי תגובה מתאימה בתחום האחר. אם כותבים שברן בתחום המספרים – הנקודה המתאימה לו מוארת בתחום הציורים; אם בונים ישר העובר דרך הראשית בתחום הציורים – מחלקת השברנים המתאימה נבנית בו בזמן בהדרגה בתחום המספרים.[9]

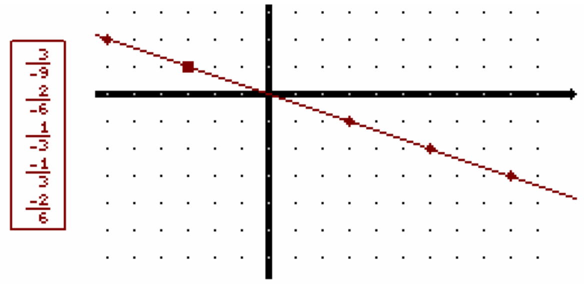
הרעיונות של רזניק שולבו בתוכנה באמצעות התאמה הדוקה בין הסימונים המתמטיים בתחום המספרים לבין העצמים החזותיים בתחום הציורים.[10] לדוגמה,

[8] 'שמשי' הם ראשי התיבות של '**ש**ברים כ**מ**חלקות **ש**קילות'. את הפיתוח של 'שמשי' יזמה אילנה ארנון בהנחייתה של מיכל ירושלמי. התוכנה פותחה במט"ח (המרכז לטכנולוגיה חינוכית) על-ידי אילנה ארנון, אהובה זלצבורג ורנטה נירנבורג, מצוות המתמטיקה במט"ח, בהנחייתה של פרלה נשר.

[9] המשתמש יכול גם לבחור להסתיר את התחום המקביל, ואחר-כך להחזיר אותו, כרצונו.

[10] לשם כך השתמשנו תכופות בצבע.

מאחר שלא קיימים במתמטיקה שברים בעלי מכנה 0 , התוכנה אינה מאפשרת לסמן נקודות על הציר האנכי. רעיונותיה של נשר מומשו באמצעות האיזומורפיזם בין שני חצאי המסך; באמצעות האפשרות שניתנה לתלמידים לערוך חקירה בתחום אחד ולעקוב אחר התגובות בתחום האחר, ובאמצעות השלמות של תחום הידע; התוכנה כוללת גם אופן עבודה שבו משתתף שדה-המספרים הרציונאליים כולו, כפי שאפשר לראות באיור 3[11]:



איור 3: שדה-המספרים הרציונאליים כולו

לצערנו, האיזומורפיזם בין שדה-המספרים הרציונאליים (עם פעולות החשבון שלו) לבין ייצוג זה אינו שלם ומוחלט. אמנם חיבור וחיסור מיוצגים צעד אחר צעד בייצוג זה (תיאור מפורט שלהם יובא בהמשך בתוך התיאור של ניסוי ההוראה), אך הכפל והחילוק של השברים אינם פועלים היטב – הייצוג בתוכנה אינו מספק הדגמה ברורה של פעולות אלה. לכן עלינו ללמד כפל וחילוק באמצעים אחרים. התוכנה 'שמשי' מתאימה לחקירות מתקדמות יותר על טבען של הפעולות כפל וחילוק, לאחר שהתלמידים למדו אותן במקום אחר וכבר שולטים בהן היטב.

ההשפעה העיקרית של APOS על אופן בנייתה של התוכנה הייתה ברעיון שכל מושג מתמטי מתפתח מתוך פעולה. לכן בנינו אופני עבודה המאפשרים למשתמש לבנות באופן ידני, צעד אחר צעד, את הייצוגים המוחשיים של המושגים המתמטיים הרלוונטיים: כזה הוא אופן העבודה המאפשר בנייה ידנית של נקודה עבור כל זוג נפרד של מונה ומכנה. אופן עבודה אחר מאפשר למשתמש לבנות בהדרגה קו ישר עבור כל מחלקת שקילות. עבור חיבור וחיסור של שברים, התוכנה מספקת גם כלים גרפיים לחיפוש מכנים משותפים, וכלים אחרים שבעזרתם ניתן לחבר או לחסר חצים המייצגים את המונים. נתאר את הפעילויות הללו במפורט בסעיף על ניסוי ההוראה.

שאלות המחקר

אף כי התוכנה נבנתה לפי עקרונות שעליהם המליצו התאורטיקנים שהוזכרו לעיל, השימוש בייצוג עליו היא מבוססת ובתוכנה המסויימת הזו על ידי תלמידי בית הספר היסודי העלה שתי שאלות עיקריות:

- ביחס לייצוג: באיזו מידה הוא אכן מוחשי עבור תלמידים צעירים?
- ביחס לתוכנה: האם השימוש ב'שמשי' אכן מחזק את פיתוחו של מושג השבר כמחלקת שקילות?

ניסוי ההוראה

בניסוי ההוראה השתתפו 30 תלמידי כיתה ה, בני 11 - 12. הניסוי נמשך שבועות אחדים. הפגישות נערכו במעבדת מחשבים, השכם בבוקר, לפני ובנוסף למערכת השעות הרגילה של בית הספר. ההשתתפות לא הייתה חובה, ואף על פי כן השתתף כל תלמיד בשתי פגישות בשבוע בממוצע. חלק מהתלמידים נשרו בדרך אבל אחרים התמידו והיו כאלה שהשתתפו בשלושים פגישות. את ההוראה ביצעו שתיים מהחוקרות (נירנבורג וארנון). מחנכת הכיתה – מורה למתמטיקה, לא הייתה מעורבת בפרוייקט (למרות שהוזמנה להשתתף בו מספר פעמים). מעורבותה היחידה התבטאה בכך שעודדה את תלמידיה להשתתף בפרוייקט. זוהי אולי תשובה חלקית לשאלה מדוע השתתפו התלמידים בשיעורי רשות במשך תקופה כה ארוכה. ההסבר היחיד האחר שאנו יכולות להציע הוא התלהבותם של התלמידים. לא ננקטו אמצעים נגד תלמידים שלא הופיעו לחלק מהשיעורים או לכולם. הלמידה התבצעה בעיקרה בקבוצות קטנות או בפעילויות יחידניות (לפי העדפת התלמידים). הקבוצות עצמן השתנו עם התקדמות התלמידים. כך, כל תלמיד שהצטרף לשיעורים לאחר היעדרות קצרה יכול היה להמשיך ברצף הלמידה מאותה נקודה שבה הפסיק קודם לכן. הלמידה התקיימה במעבדת מחשבים והתבססה על דפי עבודה שחולקו לתלמידים. הדפים כללו פעילויות שונות והתייחסו ישירות לתוכנה ולאפשרויותיה. בנוסף לפעילויות היחידניות ולפעילויות בקבוצות קטנות, נערכו דיונים בקבוצות גדולות יותר

[11] אופן עבודה זה נוסה בקרב אוכלוסיות תלמידים בוגרים יותר, אך לא נדווח על כך כאן.

שעסקו בממצאי התלמידים ובפעילויותיהם. הדיונים הונחו על ידי המורות בפרוייקט. לדיונים אלה התקבצו התלמידים על פי התקדמותם בפעילויות. לא התבצעה במהלך הפרוייקט כל הוראה פרונטאלית.

היו שלושה סוגים של פעילויות: חקירות, משחקים ודיונים על פעילויות התלמידים עצמם. המשחקים נשאו ברובם אופי חקירתי, כפי שנראה בדוגמה בהמשך המאמר. הדיונים עסקו לעיתים קרובות בהשוואה בין התוצאות שהתקבלו, הדגישו הכללות שהציעו התלמידים, והציגו בפני כלל התלמידים המצאות שהוצעו על ידי תלמיד או קבוצת תלמידים.

חשוב להדגיש שניסוי ההוראה לא כלל פעילויות שהוקדשו ללימוד אלגוריתמים או לתרגול ואימון. לא ניתן אף דף עבודה שהכיל רק רשימת תרגילים לפתרון (בעיות חשבון). בעיות מסוג זה, אם הוצגו, לווּ בדרך כלל בבעיית חקר, בה התבקשו התלמידים לעיתים קרובות לחבר תרגילים משלהם בעלי אפיונים משותפים. לדוגמה:

I. פיתרו את התרגיל: $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=$

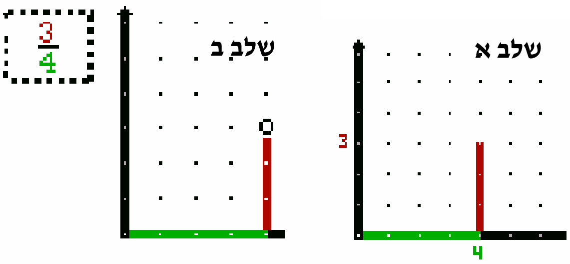
II. המציאו תרגילים אחדים, שיש להם אותה התוצאה כמו בסעיף א ואשר בהן למחוברים יש מכנה משותף.

הנושאים המתמטיים

להלן תיאור של הנושאים המתמטיים שעסקנו בהם בניסוי ההוראה ושל סוגי הפעילויות שהשתמשנו בהן.

1. *שברים ונקודות*: התלמידים למדו לבנות במחשב נקודה המתאימה לשבר נתון.

לשם כך השתמשו באפשרות בניית נקודה:

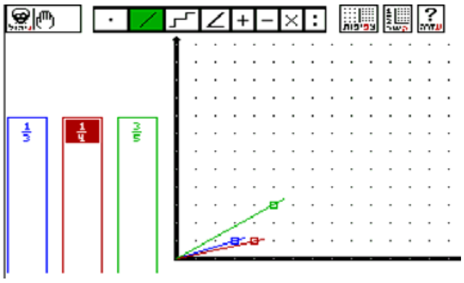


איור 4: בניית הנקודה של $\frac{3}{4}$

התלמידים למדו לבנות את הנקודות בעזרת משחקי קובייה וחידות, ולעתים חיברו חידות זה לזה.

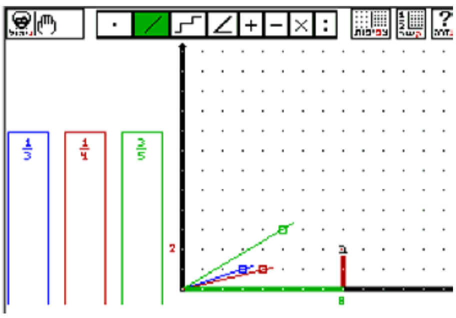
הם למדו גם על האפיונים של שברים שהנקודות שלהם מרכיבות אזורים שונים של מערכת הקואורדינטות: למשל, האזור שמעל (או מתחת) לישר העובר דרך הראשית, האזור שמימין לישר אנכי, וכו׳. כמו כן עבדו עם אזורים הנמצאים בין צירופים שונים של ישרים כאלה.

2. *מחלקות שקילות וישרים*: פעילויות חקר ומשחקים שונים הוקדשו למושג מחלקת שקילות. להלן תיאור של משחק קובייה חקירתי שנקרא ׳גינת הישרים׳. התלמידים התבקשו לבנות מסך כדוגמת המסך הבא:



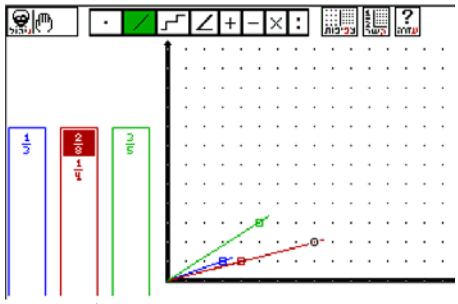
איור 5: לוח משחק טיפוסי של המשחק ׳גינת הישרים׳

שלושת הישרים הבנויים חלקית, וגם מחלקות השקילות (החלקיות) המתאימות להם, נצבעים בשלושה צבעים שונים – בהתאמה. באמצעות האפשרות ׳בניית ישר׳ המשתמש יכול ׳להצמיח׳ כל ישר צעד אחר צעד (נקודת שבר נוספת אחת בכל פעם). המְשַחֲקים משתמשים בקובייה צבעונית. כל אחד משלושת צבעי הישרים מופיע על שתי פיאות של הקובייה. כל מְשַחֵק בתורו זורק את הקובייה ומגריל צבע. אז הוא צריך לבנות נקודה חדשה על הישר בעל הצבע שהגריל.



איור 6: ניסיון להמשיך את הישר של $\frac{1}{4}$

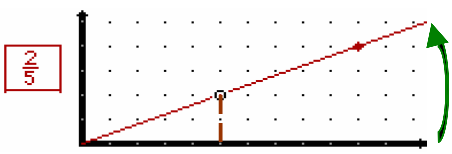
בעשותו זאת, המְשַחֵק מאריך ישר נתון או מוסיף נקודה חדשה בין שתי נקודות קיימות:



איור 7: המשכת הישר של $\frac{1}{4}$

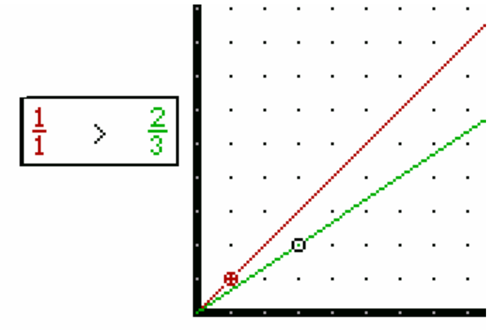
המְשַחֵק מקבל ניקוד עבור כל בנייה מוצלחת. כדי להצליח במשחק זה צריכים התלמידים לפתח ולהמציא שיטות לבניית שברים השקולים לשברים שכבר מופיעים על הישר ולא להסתפק בניסוי וטעייה. הם ממציאים שיטות גיאומטריות וחשבוניות כאחת, וכך בונים ומעשירים את מושג השברים השקולים שלהם. המצאות שהתפתחו במהלך משחקים כאלה הוכללו עוד בעזרת ניסוחים מתמטיים. בתוכנה מצויות אפשרויות נוספות שנועדו למטרה זו. בעזרת אפשרויות אילו עוסקים בשימור מחלקות שקילות: ממציאים וחוקרים פעולות המעתיקות שברן נתון על שבר אחר באותה מחלקה. אפשרויות אילו, וניסוי למידה באמצעותן, יתוארו במאמר נפרד[12]. יש לשים לב שהתלמידים עסקו בפעילויות אלה לפני שלמדו אלגוריתמים להרחבה וצמצום של שברים. יתירה מזו, חלק מהחקירות וההכללות שהוצגו כאן הובילו את התלמידים להמציא את פעולות ההרחבה והצמצום, וגם פעולות אחרות המשמרות שקילות.

3. *יחסי הסדר $>$, $=$, $<$ וצפיפות השברים*: כאשר שברים מיוצגים כנקודות במערכת צירים, יחס הסדר ביניהן נקבע על-ידי הישרים שלהם, ולא על-ידי הנקודות הנפרדות שלהם. מבחינה מתמטית אפשר לומר שהשבר הוא השיפוע של הישר שלו (הטנגנס של הזווית בין הציר האופקי החיובי לבין הישר):



איור 8: השבר הוא שיפוע הישר שלו

התלמידים שלנו פיתחו אסטרטגיית השוואה: כדי להשוות שני שברים, יש לסרטט את הישרים שלהם על המסך. השבר שהישר שלו גבוה יותר הוא השבר הגדול יותר:

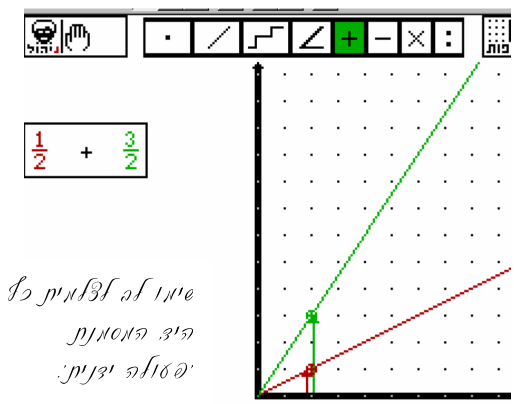


איור 9: השבר שהישר שלו גבוה יותר
הוא השבר הגדול יותר

כלל זה תקף במחצית הימנית של מערכת הצירים הקרטזית, אבל צריך לעדן אותו כאשר עוברים למערכת בשלמותה. קיימנו גם ניסויי למידה עם המערכת הקרטזית השלמה. בניסויים השתתפו תלמידי כיתה ז, ותלמידות מכללה להכשרת מורים, אולם על כך לא נדווח במאמר זה.

4. *חיבור וחיסור שברים*: תחילה הוצגו הפעילויות שבהן התאמץ התלמיד להבין כיצד עליו לעזור למחשב לפתור בעיות חיבור או חיסור. בפעילויות אלה (בעקבות APOS) נדרשו התלמידים לבצע ידנית את רוב השלבים של פתרון בעיית חיבור או חיסור.

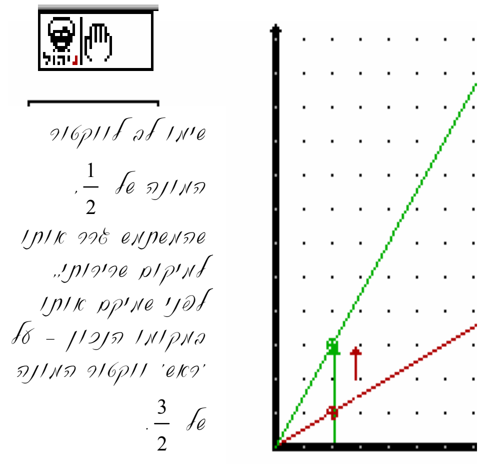
חיבור שברים ידני



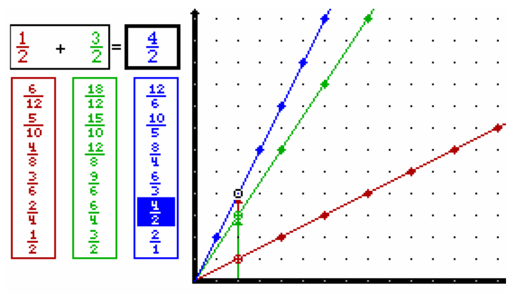
איור 10א: בעיית החיבור $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$

[12] בכתיבה

המשך:



איור 10ב: גרירה ידנית של החצים



איור 10ג: פתרון תרגיל החיבור

באיורים אלה כדאי לשים לב להתאמה החד-חד-ערכית בין שני חלקי המסך: תחום הציורים מימין ותחום המספרים משמאל. ההתאמה מודגשת גם באמצעות צבעים. מרכיבים של אותה מחלקת שקילות הם בעלי אותו צבע: הישר האלכסוני, הנקודות עליו, וקטורי המונים של איבריו, וכל הייצוגים שלהם בתחום המספרים: המחוברים בבעיית החיבור והמחלקות המתאימות להם (רשימות השברים).

5. *חיבור שברים אוטומטי*: כאשר התלמידים הפנימו את פעולות החיבור והחיסור, התחלנו בפעילויות חקירה. בפעילויות החקירה נעזרו התלמידים באפשרות 'חיבור שברים אוטומטי'. באפשרות זו, לאחר שהמשתמש מצא את המכנה המשותף בעצמו, התוכנה מסיימת לפתור את התרגיל באופן אוטומטי. בשלב זה התלמידים עסקו בחקירת טבעו של פעולות החיבור והחיסור, ובתפקיד של מחלקות השקילות בפעולות אילו.

לימוד הנושא שברים בכיתת האם של התלמידים

לפני ניסוי ההוראה, התלמידים שלנו התנסו בעיקר בשני סוגים של פעילויות בשברים בכיתות האם שלהם: בכיתה ד – התנסו בפעילויות בשברים בעזרת גזרות עיגולים; בתחילת כיתה ה – למדו שוויונים בשברים בעזרת ריבועים מחולקים; בעת שנערך הניסוי למדו התלמידים שלנו בכיתת האם שלהם לייצג שברים על ישר מספרים.

בפעילויות אלה לא פגשו התלמידים כלל את המושג מחלקת שקילות. כפי שהזכרנו בתחילת המאמר, לימוד המושג מחלקת שקילות הוא בעל משמעות רבה יותר מסתם השוואה בין שני שברים.

לאחר שהסתיים ניסוי ההוראה, בזמן שבין סיומו לבין קיום הראיונות, התלמידים למדו בכיתת האם שלהם את האלגוריתמים עבור הרחבה וצמצום.

הראיונות

לא ערכנו מבחן מוקדם. הסיבה לכך הייתה שמעולם, בכל התנסויותינו עם תלמידים בקבוצות גיל אלה, לא נתקלנו בילדים שהייתה להם איזושהי היכרות עם המושג של מחלקת שקילות. כמו כן לא נתקלנו מעולם בספרות בעדויות כלשהן להיכרות עם מושגים מסוג זה. שלושה חודשים לאחר שהסתיים ניסוי ההוראה השתמשנו בראיונות מובנים וריאיינו 21 תלמידים (אלה שהיו זמינים). מביניהם, תלמידה אחת נשרה בשל חוסר יכולתה לעבוד הייצוג של שברים במערכת צירים. הנתונים להלן נאספו מן הראיונות עם 20 התלמידים הנותרים – 8 בנים ו- 12 בנות.

הממצאים

הממצאים המתייחסים לשתי שאלות המחקר שהוצגו כאן, נובעים משני מקורות:

א. הראיונות המובנים שנערכו בסיום ניסוי ההוראה.
ב. הנתונים שנאספו במהלך ניסוי ההוראה עצמו.

ממצאים הנוגעים לשאלת המחקר הראשונה – על המוחשיות של הייצוג.

שרטוט של נקודות וישרים נראה לנו, החוקרות, מוחשי מסיבות אחדות:

- אופיים החזותי;
- יכולתם של הילדים לסרטט אותם בעצמם;
- המשתמש מתקשר בשפת הנקודות והישרים כאשר הוא עובד בתוכנה בתחום הציורים;

- בישראל, תלמידים בכיתות הבינוניות של בית הספר היסודי מכירים את העצמים הללו ואת המינוח הקשור אליהם. היכרות כזאת מתיישבת עם העקרונות של נשר לבחירת תחום ההדגמה.
- תלמידי כיתה ה בישראל אמורים להכיר את מערכת הצירים הקרטזית אבל התלמידים שלנו לא הכירו אותה. בניסוי ההוראה שלנו הם נתקלו ועבדו במערכות צירים קרטזיות בפעם הראשונה. פרט לשלושה תלמידים, כל התלמידים שלנו השיגו רמה טובה של ביצועים בעבודה עם מערכות כאלה.

למרות העבודה שעבורנו נראו הייצוגים מוחשיים, רצינו לחקור עד כמה מוחשיים הם נראים לתלמידים. תכננו ראיונות שיעזרו לנו לעקוב אחר המוחשיות של הייצוג על-פי קריטריונים שנוסחו בידי ארנון (1998): האם התלמידים הפנימו את הייצוגים הללו במידה כזאת שיכלו לשחזר אותם ולפעול עליהם בדמיונם, או בעזרת סקיצות שנעשו ביד? לשם כך שאלנו את התלמידים שאלות על הייצוג בלי להשתמש בתוכנה (וללא הדיוק שהיא מבטיחה). פתרון הבעיות בעת הראיונות היה כרוך בהכנת ציורים באמצעות נייר ועיפרון, והתלמידים הורשו לבדוק את תשובותיהם במחשב רק לאחר שעבדו תחילה בלי התוכנה.

מה מצאנו בראיונות? בשאלות הנייר והעיפרון, שכללו ציור חופשי של מערכות צירים קרטזיות, התלמידים הצליחו להבין ולבנות שרטוטים נכונים שייצגו הן שברנים והן מחלקות שקילות. נראה זאת בציטוטים שנביא בהמשך. יתירה מזו, התלמידים השתמשו בשרטוטים כאלה בתהליכי פתרון בעיות חשבוניות. לדעתנו, ראיות אלה מוכיחות כי הייצוג הזה הוא מוחשי עבור התלמידים שלנו.

שאלה אחרת הקשורה לשאלת המוחשיות, היא שאלת הקשר של הייצוג הזה לייצוגים מוחשיים מקובלים אחרים של שברים. בניסוי ההוראה, וגם בראיונות, למדנו שהתלמידים חשבו על קשרים מסוג זה. במיוחד הם היו מודאגים משאלת הקשר בין ייצוג זה לבין ייצוג העיגול שאותו למדו בשנת הלימודים הקודמת (כיתה ד). מידת ההתמדה של העיגול כייצוג של הפירוש 'חלק-שלם' של השבר, וכן מעלותיו וחסרונותיו, נדונים בספרות, למשל, אצל וינר ולינצ'בסקי (Linchevsky & Vinner, 1989). בקטעים הבאים אפשר למצוא כמה ביטויים לדאגה זו, ופתרונות שהציעו התלמידים:

ליאור, בראיון שאחרי ניסוי ההוראה, כתב שלושה שברים שהיו שווים לדעתו לשבר $\frac{2}{3}$. כששאלנו אותו איך ידע זאת, אמר:

> "כי הם באותה מחלקה. באותה מחלקה, כל השברים שווים. הם נהיים יותר חלקים, יותר מספר חלקים, אבל הם שווים בגודל ".

שימו לב שהמונח חלקים כפי שהשתמש בו התלמיד, אינו שייך לייצוג במערכת צירים שאנו השתמשנו בו. כאן, הקשר בין מערכת הצירים ופעולת חלוקת השלם הועלה בידי התלמיד עצמו.

אופירה הסבירה כיצד היא שייכה את $\frac{1}{1}$ ואת $\frac{1}{2}$ לישרים המתאימים להם:

> "בגלל ש- $\frac{1}{1}$ זה עיגול, זה שלם, ו- $\frac{1}{2}$ זה חצי ממנו".

כדי להשלים קבוצת ראיות זו נצטט את מילי שהתבוננה בישר של $\frac{1}{1}$ ובמחלקת השקילות שלו:

> "אני יודעת למה כל השברים האלה, ו......, למה הם שווים, כי את מחלקת את העיגול ל- 3 חלקים,
>
> וצובעת אותם, ומתקבל העיגול, אבל $\frac{1}{1}$ זה לא בעיגול."

המורה: "ומה עם $\frac{4}{4}$?"

מילי: "אה כן, זהו שלם, אחד".

אבל כשחזרה למחרת לבית הספר, אמרה:

> "חשבתי על זה בבית, ועכשיו אני יודעת. אפשר לראות את $\frac{1}{1}$ בעיגול. את לוקחת עיגול אחד, ולוקחת את כולו."

אנו רואים שהתלמידים המצוטטים כאן חשבו על הקשר בין ייצוג זה לבין ייצוגים מוחשיים אחרים של שברים, ומצאו דרך לשלב אותם זה בזה.

המשך...

בחלק זה של המאמר הצגנו בפני הקורא את המטרה הלימודית שלנו: ללמד את המושג "מחלקת שקילות של שברים". תארנו את המורכבות של המושג לעומת הצורך בהוראתו. כדי לגשר בין המורכבות לצורך

הצענו, בעקבות פיאז'ה, ייצוג גרפי למושג, ופעילויות שמטרתן לעזור לתלמיד לפתח אותו. הייצוג והפעילויות מתאפשרים בתוכנה 'שמשי' שפתחנו במיוחד למטרה זו. תארנו ניסוי למידה שסיפק עדויות לכך שהייצוג והפעילויות מוחשיים מספיק לתלמידים בכיתה ה. רוב תלמידי הניסוי הצליחו לעבוד עם הייצוג, ואף לקשר אותו לייצוגים מוחשיים אחרים של שברים, כמו שלם וחלקיו.

בחלקו השני של המאמר נתאר את הממצאים הנוגעים לשאלת המחקר השנייה, אודות ההתפתחות של המושג מחלקת שקילות אצל תלמידינו, ונספק עדויות מפורטות כיצד הפנימו תלמידים את הייצוג הזה. נתאר שלבים מפורטים של ההפנמה הזו עד לשלב שבו השתמשו בייצוג לפתרון בעיות שברים מקובלות כמו השוואה, חיבור וחיסור שברים.

רשימת מקורות (לחלקים א+ב של המאמר)

Arnon, I. (1998), *In The Mind's Eye: How Children Develop Mathematical Concepts - Extending Piaget's Theory.* Unpublished doctoral dissertation, School of Education, Haifa University.

Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (1999), What can be learnt about fractions only with computers. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the Twenty-Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education* II, pp. 33-40, *Haifa, Israel.*

Asiala, M., Brown, A., DeVreis, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996), *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematical education. Research in Collegiate Mathematical Education II,* CBMS 6, 1-32.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Prablu, V. & Vidakovic, D. (1999), One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 1 (pp. 95-110).

Dubinsky, E. (1989), A learning theory approach to calculus. *Proceedings of the St. Olaf Conference on Computer Algebra Systems, Northfield, Minesota.*

Dubinsky, E. (1991), Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, (pp. 95-123). Dordrecht/Boston/London: Clair Academic Publishers.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D., (1995), The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29, pp. 29-44.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an educational task.*, Dordrecht, The Netherland: Reidel.

Inhelder, B., Sinclair, H., & Bovet, M. (1974), *Learning and the development of cognition* (S. Wedgwood, trans.). London: Routland & Kegan Paul Ltd. (Original work published 1974).

Kalman, D. (1985), Up fractions! Up n divided by m! *Arithmetic Teacher*, 32 (8), 42-43.

Kaput, J. T. (1985), *Multiplicative word problems and intensive quantities: An integrative software response, ETC Technical report, Word problem Project*. Unpublished manuscript.

Kieren, T. A. (1976), On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh, (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop, eric/smeac* (pp. 101-144). Columbus.

Lemerise, T., & Côté, B. (1991), La Fisée fraction: Une exploration inusitée des notions d'équivalence et d'ordre. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* II, (pp. 285-292). Assisi, Italy.

Linchevsky, L. & Vinner, S. (1989), Canonical representations of fractions as cognitive obstacles in elementary teachers. In G. Vergnaud, J. Rogalsky & M. Artigue (Eds.), *Actes de la 13eme Conf'rence Internationale [Proceedings of the Thirteenth International Conference for the] Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 242-249). Paris, France.

Nesher, P. (1988), Beyond constructivism (Learning mathematics at school). In A. Borbās (Ed.), *Proceedings of the Twelfth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* I, (pp. 54-74). Veszprem, Hungary.

Nesher, P. (1989), Microworlds in mathematical education: A pedagogical realism. In L.B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning & instruction* (pp. 187-215). Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Piaget, J. (1970), *Structuralism* (C. Mascher, Trans.). New York: Basic Books, Inc., Publishers. (Original work published 1968).

Piaget, J. (1975), Piaget's theory (G. Cellerier & J. Langer, trans.). In P.B. Neubauer (Ed.), *The process of child development* (pp. 164-212). New York: Jason Aronson.

Piaget, J. (1976), *The grasp of consciousness* (S. Wedgwood, Trans.). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. (Original work published 1974).

Resnick, L. B., & Omanson, S. S., (1987), Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (ed.) *Advances in Instructional Psychology*, V. 3, pp. 41-95. Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Yerushalmy, M. (1991), Student Perceptions of Aspects of Algebraic Functions Using Multiple Representation Software, *Journal of Computer-Assisted Learning*, 1991, Vol. 7, pp. 42-57.

Zazkis R. and Campbell, C. (1996), Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 540-563.